

Representaciones de la ec. de Schrödinger en $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t)$$

En $\{|\vec{p}\rangle\}$

Ec de Schrödinger en $\vec{p}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{p} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2m} \langle \vec{p} | p^2 | \psi(t) \rangle + \langle \vec{p} | \tilde{V}(\vec{R}) | \psi(t) \rangle$$

↓
Fourier expl

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(\vec{p}, t) = \left(\frac{p^2}{2m} \tilde{\Psi}(\vec{p}, t) + \int \langle \vec{p} | V(\vec{R}) | \vec{p}' \rangle \tilde{\Psi}(\vec{p}', t) d^3 p' \right)$$

$\int d^3 r d^3 r'$ $\int d^3 r' d^3 r$

$$\iiint \underbrace{\langle \vec{p} | \vec{r} \rangle}_{(2\pi\hbar)^{3/2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}} \langle \vec{r} | V(\vec{R}) | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \vec{p}' \rangle \psi(\vec{p}', t) d^3 p' d^3 r d^3 r'$$

$$(2\pi\hbar)^3 \int e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - \vec{p}'\cdot\vec{r}')} V(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \psi(\vec{p}', t) d^3 p' d^3 r d^3 r'$$

$$(2\pi\hbar)^3 \int e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}')\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3 r \psi(\vec{p}', t) d^3 p' = (2\pi\hbar)^{3/2} \int \tilde{V}(\vec{p} - \vec{p}') \psi(\vec{p}', t) d^3 p'$$

transformada de Fourier

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(\vec{p}, t) = \left(\frac{p^2}{2m} \tilde{\Psi}(\vec{p}, t) + (2\pi\hbar)^{3/2} \int \tilde{V}(\vec{p} - \vec{p}') \psi(\vec{p}', t) d^3 p' \right)$$

Ec de Schröd en la base de $\{|\vec{p}\rangle\}$.

■ Cuantización de cantidades físicas. El tercer postulado explica por qué obtenemos cuantización de ciertas cantidades que medimos como la energía de los átomos pero no implica que todas las cantidades están cuantizadas pues hay observables con espectro continuo. No vamos a hacer suposiciones a priori de la cuantización de los observables. Resolver la ecuación de Schrödinger nos dará eso.

■ Dada la naturaleza probabilística de los postulados su verificabilidad depende de la realización repetida de N experimentos idénticos. Las predicciones se asemejarán a la realidad cuando $N \rightarrow \infty$. Como N siempre será finito entonces debemos usar lenguaje estadístico para interpretar los resultados. (Por eso $\bar{X}$ y σ_X).

■ El valor promedio de un observable A de un sistema en estado $|\psi\rangle$ que denotaremos por $\langle A \rangle_\psi$ o simplemente $\langle A \rangle$ se define como el promedio de los resultados obtenidos cuando un número grande de mediciones N son realizadas en sistemas en el estado $|\psi\rangle$.

■ ¿Cómo calculamos $\langle A \rangle_\psi$?

← promedio sobre el # de repeticiones del experimento

■ Consideremos a A como un observable con espectro discreto y no degenerado.

- Tras realizar N mediciones de A de sistemas en el estado **normalizado** $|\psi\rangle$ obtendremos el eigenvalor a_n un total de $\mathcal{N}(a_n)$ veces donde

$$\frac{\mathcal{N}(a_n)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}(a_n)$$

$$\text{y } \sum_n \mathcal{N}(a_n) = N$$

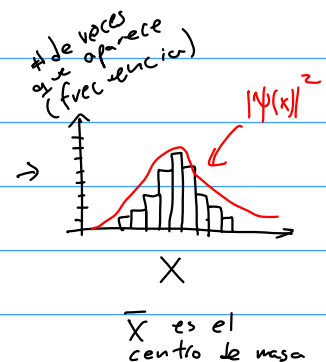
- El valor promedio de los resultados es la suma de los valores obtenidos dividida entre el total de mediciones

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &= \frac{1}{N} \sum_n a_n \mathcal{N}(a_n) \\ &= \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) \\ &= \sum_n a_n |\langle u_n | \psi \rangle|^2 \\ &= \sum_n a_n \langle \psi | u_n \rangle \langle u_n | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left[\sum_n a_n |u_n\rangle \langle u_n| \right] | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | A | \psi \rangle \end{aligned}$$

■ Si $|\psi\rangle$ no está normalizado entonces $\langle A \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$

■ En la práctica, para calcular $\langle A \rangle_\psi$ explícitamente nos situamos en una representación en particular. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_\psi &= \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}) x \psi(\mathbf{r}) \\ \langle P_x \rangle_\psi &= \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}) \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$



σ_X es el ancho

(momento de inercia)
 $\int x^2 \rho(x)$

← practicar sobre normalizar $|\psi\rangle$

7.2. Desviación RMS de dos observables conjugados

RMS deviation

- ¿ $\langle A \rangle$ refleja el centro de masa de los resultados obtenidos pero cuál es su dispersión?
- Podríamos estar tentados a definir $\langle A - \langle A \rangle \rangle$ pero esto $\langle A \rangle - \langle A \rangle = 0$
- por eso definimos

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$$

Usando la expresión para el promedio obtenemos

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle}$$

que podemos escribir de manera distinta como

$$\begin{aligned} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle &= \langle A^2 - 2\langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned}$$

por lo tanto la desviación RMS está dada por

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

- Veremos que al aplicar esto a los observables **R** y **P** obtendremos

$$\Delta X \cdot \Delta P_x \geq \hbar/2$$

$$\Delta Y \cdot \Delta P_y \geq \hbar/2$$

$$\Delta Z \cdot \Delta P_z \geq \hbar/2$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}}$$

$$\text{Varianza} = E[(X - E[X])^2]$$

para $\hat{X}$

$$\begin{aligned} \Delta X^2 &= \int \psi^*(x) (x - \bar{x})^2 \psi(x) dx \\ &= \int (x - \bar{x})^2 |\psi(x)|^2 dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad p(x) \end{aligned}$$